Algebra Lineare e Geometria

Esercizi su spazi vettoriali

1. Dipendenza lineare

Esercizio 1. Determina se i seguenti insiemi di vettori sono linearmente indipendenti.

$$\left\{\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right\};\qquad \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}\right\};$$

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\3\\3\end{pmatrix}\right\};\qquad \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\5\\1\\2\end{pmatrix}\right\};$$

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix}\right\};$$

- $\{(1,-\frac{1}{4},0,0,1)\}$;
- $\{(1,1,4),(0,3,1),(1,0,1)\}$;
- $\{(-2,-4,2,-4),(-1,2,0,1),(1,6,-2,-5)\}$;
- $\{(1,1,-1),(\frac{1}{2},0,0),(-2,\frac{1}{3},0),(0,1,0)\}$.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti vettori $\mathbb{R}^4$, con $h \in \mathbb{R}^4$ un parametro reale:

$$v_1 = (1,0,1,0),\quad v_2 = (h,2,h,2),\quad v_3 = (1,1+h,1,2h).$$

Determinare per quale valore di h il vettore $v = (4,1,4,2)$ è una combinazione lineare di v_1, v_2, v_3. Per quali valori di h i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti?

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale e $v_1, v_2, v_3 \in V$ vettori linearmente indipendenti. Mostrare che l'insieme dei vettori $\{v_1 - v_2,\ v_2 - v_3,\ v_3 - v_1\}$ è linearmente indipendente.

Esercizio 4. Determinare quali de seguenti insiemi di vettori di $V = \mathbb{K}[t]$ sono linearmente indipendenti.

- $\{1,\, t,\, t^2,\, t^3\}$;
- $\{1,\, 1+2t,\, 1+2t+3t^2\}$;
- $\{1+t,\, 1-t,\, 1-t^2\}$;
- $\{1+t,\, 1-t,\, 1+t^2,\, t+t^2\}$;
- $\{t^2+t,\, t^2+1,\, t^2-1\}$.

Esercizio 5. Mostra che il seguente insieme di vettori di $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2,2)$ è linearmente indipendente.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Esercizio 6. Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente insieme di vettori in $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2,2)$ è linearmente indipendente:

$$\left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ k & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2k & 2 \\ 0 & 1-k \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & k^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Basi

Esercizio 7. Trova una base del kernel della seguente matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 8. Per ognuno dei seguenti insiemi di vettori di $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, determina se è linearmente indipendente, se genera $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, e se è una base di $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$.

(1) $\{(t+1)^2, t+1, 1\}$;

(2) $\{(t+1)^3, (t+1)^2, t+1, 1\}$;
(3) $\{1, t, t^2\}$;
(4) $\{t, t+1, t+2\}$.

Esercizio 9. Trova una base e la dimensione dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^n$.

(1) $\langle(1,2,3),(0,1,2),(0,0,1),(1,1,1)\rangle$;
(2) $\langle(1,-1,1,1),(-1,1,-1,1),(-1,-1,1,-1),(0,-1,1,-1),(0,0,0,0)\rangle$.
(3) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+3y+z+w = y-x+z = 0\}$;
(4) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y-z = 0\}$.

Esercizio 10. Per ognuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, determina se sono linearmente indipendenti, se sono un insieme di generatori per $\mathbb{R}^n$, e se sono una base di $\mathbb{R}^n$. Se un insieme è linearmente indipendente ma non una base di $\mathbb{R}^n$, completalo a una base di $\mathbb{R}^n$. Se un insieme genera $\mathbb{R}^n$ ma non è una base, estraine una base di $\mathbb{R}^n$.

(1) $\{(-2,0)\}$
(2) $\{(1,1,1),\ (0,-1,0)\}$
(3) $\{(1,1,0,0),\ (3,0,0,1)\}$
(4) $\{(2,1,0),\ (0,3,1),\ (2,4,1),\ (1,2,3),\ (3,2,1)\}$

Esercizio 11. Sia A la seguente matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ 6 & -3 & 9 \\ 8 & -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

(1) Usando il teorema del rango, trova la dimensione di $\ker A$.
(2) Verifica la tua risposta trovando una base di $\ker A$.
(3) Trova sia una rappresentazione cartesiana che una rappresentazione parametrica di $\ker A$

Esercizio 12. Dato il vettore $v \in V$ la base $\mathcal{B}$ di V, determinare il vettore $[v]_{\mathcal{B}}$ delle coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$.

- $v = (4,5) \in \mathbb{Q}^2$, $\mathcal{B} = \{(1,2),(2,1)\}$.

- $v = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$.
- $v = (t+1)^2 \in \mathbb{K}[t]_{\leq 3}$, $\mathcal{B} = \{t^2+t+1, t^2+t, t\}$.
- $v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2,2)$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{(1,2),(-3,-1)\}$.

3. Sottospazi

Esercizio 13. Determina se i due seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$ sono uguali.

$$U = \langle (1,1,0,2),(0,1,-1,0) \rangle,$$
$$V = \langle (1,0,1,2),(1,3,-2,2) \rangle.$$

Esercizio 14.

(1) Esibisci un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ che non è un sottospazio.
(2) Esibisci un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ contenente $(0,0,0)$ che non è un sottospazio.
(3) Per $k = -1, 0, 1$, sia $V_k \subset \mathbb{R}^2$ il sottoinsieme definito come

$$V_k := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tale che } x^2 + y^2 = k \right\}.$$

Determinare per quali valori di k il sottoinsieme V_k è un sottospazio.
(4) Sia $V \subset \mathbb{R}^2$ il sottoinsieme definito come

$$V := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tale che } x^2 = y \right\}.$$

Determinare se V è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 15. Determina se i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi. In caso positivo, trovane una base; completa quindi la base del sottospazio a base di $\mathbb{R}^3$.

(1) $A_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y - 2z = 0 = z\}$.
(2) $A_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y = 0 = z + 3y - 2x\}$.
(3) $A_3 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x, y \in \mathbb{Q}\}$.
(4) $A_4 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \geq 0\}$.
(5) $A_5 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y = 5\}$.

Esercizio 16. [Un po' più difficile] Determina se i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}[t]$ sono sottospazi. In caso positivo, trovane una base e la dimensione.

(1) $A_1 := \{p(t) \in \mathbb{R}[t] \,|\, p(t) = tp'(t)\}$.
(2) $A_2 := \{p(t) \in \mathbb{R}[t] \,|\, p'(2) = 5\}$.
(3) $A_3 := \{p(t) \in \mathbb{R}[t] \mid \deg p(t) \leq 2\}$.
(4) $A_4 := \{p(t) \in \mathbb{R}[t] \,|\, tp'(t) + p''(t) = 2p(t)\}$.
(5) $A_5 := \{p(t) \in \mathbb{R}[t] \mid \deg p'(t) = 0\}$.
(6) $A_6 := \{(p(t) \in \mathbb{R}[t] \mid \deg p'(t) \leq 1\}$.
(7) $B_k := \{p(t) \in \mathbb{R}[t] \mid \deg p(t) = k\} \cup \{0\}$, for $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Esercizio 17. Determinare quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(3,3)$ sono sottospazi. In caso positivo, trovane una base e la dimensione.

(1) $\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(3,3) \mid \mathrm{rk}(A) = 2\}$;
(2) $\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(3,3) \mid \mathrm{rk}(A) \leq 2\}$;
(3) L'insieme delle matrici diagonali $\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(3,3) \mid a_{ij} = 0 \text{ if } i \neq j\}$;
(4) L'insieme delle matrici triangolari superiori
$$\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(3,3) \mid a_{ij} = 0 \text{ if } i > j\}$$
(5) L'insieme delle matrici simmetriche $\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(3,3) \mid a_{ij} = a_{ji}\}$.

4. Rappresentazioni cartesiane e parametriche

Eserizio 18. Per ognuna delle seguenti matrici

(1) usando il teorema del rango, trova la dimensione del kernel;
(2) verifica la tua risposta trovando una base del kernel;
(3) trova sia una rappresentazione cartesiana che una rappresentazione parametrica del kernel.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ 6 & -3 & 9 \\ 8 & -4 & 12 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 + \frac{t}{2} & 1 + t \\ 0 & -2t & 4 & 1 \\ 0 & 0 & t - 2 & 1 \end{pmatrix},$$

con $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 19. Sia H il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$:

$$H = \langle (1,0,-1,1),(0,1,0,2),(0,0,-1,1)\rangle.$$

Determina una matrice A tale che $H = \ker(A)$. Qual è il rango di A.

Esercizio 20. Trova una rappresentazione cartesiana dei seguenti sottospazi.

(1) $\langle (1,1,-1,0),(-1,-2,0,1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.
(2) $\langle (0,-1,-2),(1,-2,0)\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$.
(3) $\langle (1,-1),(-3,3)\rangle \subseteq \mathbb{R}^2$.

5. Operazioni con i sottospazi

Esercizio 21. Per ognuna delle seguenti coppie di sottospazi H_1, H_2, calcola $H_1 \cap H_2$ e $H_1 + H_2$, danne una rappresentazione parametrica e una cartesiana, e verifica la formula di Grassmann.

(1) $H_1 = \langle (-1,0,1),(2,1,0)\rangle,\quad H_2 = \ker\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3$.
(2) $H_1 = \ker\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad H_2 = \ker\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3$.
(3) $H_1 = \langle (-1,2,0,1),(1,-1,1,0)\rangle,\quad H_2 = \langle (2,3,1,1),(2,2,0,0)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

Esercizio 22. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ lo spazio delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3w - x - y = 0 \end{cases}$$

Sia $V := \langle (2,0,1,1),(3,-2,-2,0)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.
Calcola la dimensione e trova una base di U, V, $U + V$ and $U \cap V$.

Esercizio 23. Siano A e B le seguenti matrici.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sia $U = \mathrm{row}(A)$, and $V = \ker(B)$. Calcola la dimensione e trova una base di U, V, $U + V$ and $U \cap V$.